УДК 681.3
Ш57

Е. В. Шикин, А. В. Боресков

Ш57 Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения. — М.: "ДИАЛОГ-МИФИ", 1995. — 288 с.

ISBN 5-86404-061-4

Книга знакомит с такими основными понятиями и методами компьютерной графики, как растровые алгоритмы, геометрические сплайны, методы удаления скрытых линий и поверхностей, закрашивание, трассировка лучей, излучательность. Она дает представление об основных направлениях компьютерной графики и позволяет освоить базовые приемы реализации ее алгоритмов на персональных компьютерах. В книге дается краткое описание основных возможностей графического пакета 3D Studio. Приведенные в книге программы могут быть использованы при решении широкого класса задач визуализации и анимации. Книгу можно рассматривать как практическое руководство, т. к. она содержит примеры графических задач, которые способен выполнить, прочитавший книгу.

Ш $\frac{2404000000\text{-}009}{Г70(03)\text{-}95}$ Без объявл.

Учебно-справочное издание

Евгений Викторович Шикин
Алексей Викторович Боресков

Компьютерная графика.
Динамика, реалистические изображения

Редактор О. А. Голубев
Макет О. А. Кузьминовой
Обложка Н. В. Дмитриевой
Корректор В. С. Кустов

Лицензия ЛР N 070109 от 29.08.91. Подписано в печать 28.06.95.
Формат 60х84/16. Бум. офс. Печать офс. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 16.74. Уч.-изд. л. 8.9. Тираж 10000 экз. Заказ 715.

Акционерное общество "ДИАЛОГ-МИФИ"
115409, Москва, ул. Москворечье, 31, корп. 2

Подольская типография
142110, г. Подольск, Московская обл., ул. Кирова, 25

ISBN 5-86404-061-4

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Хотя время и причисляют к непрерывным величинам, однако оно, будучи незримым и без тела, не целиком подпадает власти геометрии, <...> точка во времени должна быть приравнена к мгновению, а линия имеет сходство с длительностью известного количества времени <...>, и если линия делима до бесконечности, то и промежуток времени не чужд такого деления.

Леонардо да Винчи

Вывод изображения на экран дисплея и разнообразные действия с ним, в том числе и визуальный анализ, требуют от пользователя известной геометрической грамотности. Геометрические понятия, формулы и факты, относящиеся прежде всего к плоскому и трехмерному случаям, играют в задачах компьютерной графики особую роль. Геометрические соображения, подходы и идеи в соединении с постоянно расширяющимися возможностями вычислительной техники являются неиссякаемым источником существенных продвижений на пути развития компьютерной графики, ее эффективного использования в научных и иных исследованиях. Порой даже самые простые геометрические методики обеспечивают заметные продвижения на отдельных этапах решения большой графической задачи. С простых геометрических рассмотрений мы и начнем наш рассказ.

Заметим прежде всего, что особенности использования геометрических понятий, формул и фактов, как простых и хорошо известных, так и новых более сложных, требуют особого взгляда на них и иного осмысления.

Аффинные преобразования на плоскости

В компьютерной графике все, что относится к двумерному случаю, принято обозначать символом (2D) (2-dimension).

Допустим, на плоскости введена прямолинейная координатная система. Тогда каждой точке М ставится в соответствие упорядоченная пара чисел (х, у) ее координат (рис. 1). Вводя на плоскости еще одну прямолинейную систему

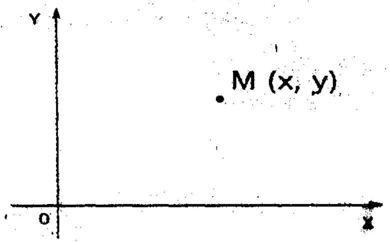

Рис. 1

координат, мы ставим в соответствие той же точке М другую пару чисел - (x^*, y^*).

Переход от одной прямолинейной координатной системы на плоскости к другой описывается следующими соотношениями:

$$x^*=\alpha x+\beta y+\lambda\ ,$$

$$y^*=\gamma x+\beta y+\mu\ , \qquad (*)$$

где α, β, γ, λ, μ - произвольные числа, связанные неравенством

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Замечание

Формулы (*) можно рассматривать двояко: либо сохраняется точка и изменяется координатная система (рис. 2) - в этом случае произвольная точка М остается той же, изменяются лишь ее координаты

$(x, y) \mid (x^*, y^*)$,

либо изменяется точка и сохраняется координатная система (рис. 3) - в этом случае формулы (*) задают отображение, переводящее произвольную точку М(х, у) в точку М(х*, у*), координаты которой определены в той же координатной системе.*

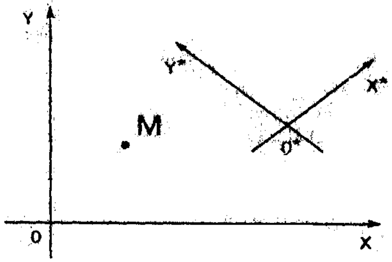

Рис. 2

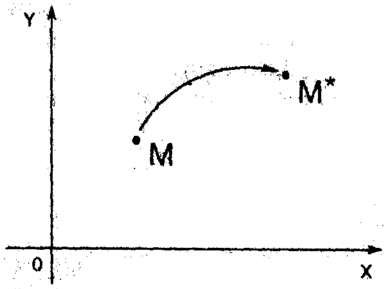

Рис. 3

В дальнейшем мы будем рассматривать формулы (*) как правило, согласно которому в заданной системе прямолинейных координат преобразуются точки плоскости.

В аффинных преобразованиях плоскости особую роль играют несколько важных частных случаев, имеющих хорошо прослеживаемые геометрические характеристики. При исследовании геометрического смысла числовых коэффициентов в формулах (*) для этих случаев нам удобно считать, что заданная система координат является прямоугольной декартовой.

А. Поворот (вокруг начальной точки на угол φ) (рис. 4) описывается формулами

$$x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi\ ,$$
$$y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi\ .$$

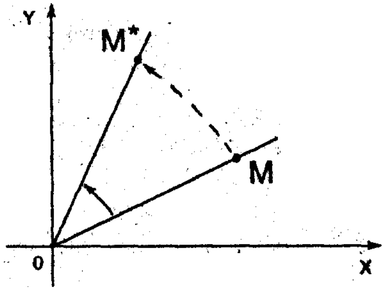

Рис. 4

Б. Растяжение (сжатие) вдоль координатных осей можно задать так:

$$x^* = \alpha x,$$
$$y^* = \delta y,$$
$$\alpha > 0, \delta > 0\ .$$

Растяжение (сжатие) вдоль оси абсцисс обеспечивается при условии, что $\alpha > 1$ ($\alpha < 1$) На рис. 5 $\alpha = \delta > 1$.

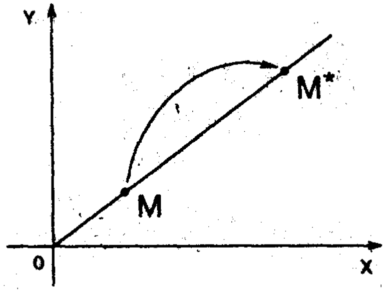

Рис. 5

В. Отражение (относительно оси абсцисс) (рис. 6) задается при помощи формул

$$x^* = x,$$
$$y^* = -y.$$

Г. На рис. 7 вектор переноса ММ* имеет координаты λ и μ. Перенос обеспечивают соотношения

$$x^* = x + \lambda,$$
$$y^* = y + \mu.$$

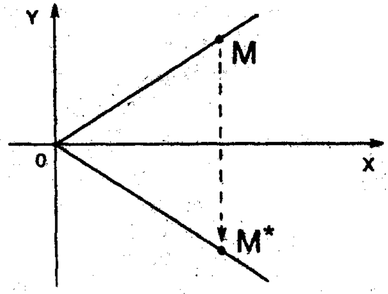

Рис. 6

Выбор этих четырех частных случаев определяется двумя обстоятельствами.

1. Каждое из приведенных выше преобразований имеет простой и наглядный геометрический смысл (геометрическим смыслом наделены и постоянные числа, входящие в приведенные формулы).

2. Как доказывается в курсе аналитической геометрии, любое преобразование вида (*) всегда можно представить как последователь-

ное исполнение (суперпозицию) простейших преобразований вида А, Б, В и Г (или части этих преобразований).

Таким образом, справедливо следующее важное свойство аффинных преобразований плоскости: любое отображение вида (*) можно описать при помощи отображений, задаваемых формулами А, Б, В и Г.

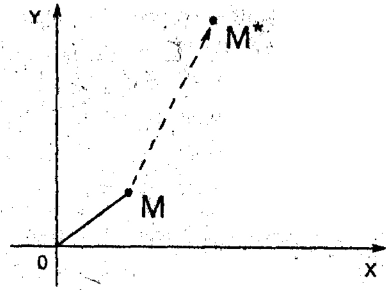

Рис. 7

Для эффективного использования этих известных формул в задачах компьютерной графики более удобной является их матричная запись. Матрицы, соответствующие случаям А, Б и В, строятся легко и имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Однако для решения рассматриваемых далее задач весьма желательно охватить матричным подходом все четыре простейших преобразования (в том числе и перенос), а, значит, и общее аффинное преобразование. Этого можно достичь, например, так: перейти к описанию произвольной точки плоскости не упорядоченной парой чисел, как это было сделано выше, а упорядоченной тройкой чисел.

Однородные координаты точки

Пусть M - произвольная точка плоскости с координатами x и y, вычисленными относительно заданной прямолинейной координатной системы. Однородными координатами этой точки называется любая тройка одновременно неравных нулю чисел x_1, x_2, x_3, связанных с заданными числами x и y следующими соотношениями:

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y.$$

При решении задач компьютерной графики однородные координаты обычно вводятся так: произвольной точке M(x, y) плоскости ставится в соответствие точка Mэ(x, y, 1) в пространстве (рис. 8).

Заметим, что произвольная точка на прямой, соединяющей начало координат, точку O(0, 0, 0), с точкой Mэ(x, y, 1), может быть задана тройкой чисел вида

(hx, hy, h).

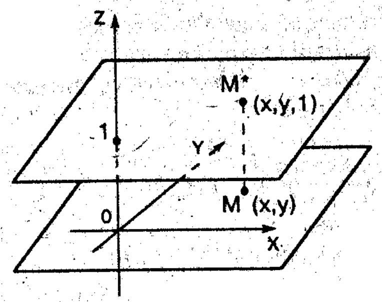

Рис. 8

Будем считать, что h ≠ 0.

Вектор с координатами hx, hy, h является направляющим вектором прямой, соединяющей точки O(0, 0, 0) и Mэ(x, y, 1). Эта прямая пересекает плоскость z = 1 в точке (x, y, 1), которая однозначно определяет точку (x, y) координатной плоскости *xy*.

Тем самым между произвольной точкой с координатами (x, y) и множеством троек чисел вида

(hx, hy, h), h ≠ 0,

устанавливается (взаимно однозначное) соответствие, позволяющее считать числа hx, hy, h новыми координатами этой точки.

Замечание

Широко используемые в проективной геометрии однородные координаты позволяют эффективно описывать так называемые несобственные элементы (по существу, те, которыми проективная плоскость отличается от привычной нам евклидовой плоскости). Более подробно о новых возможностях, предоставляемых введенными однородными координатами, говорится в четвертом разделе этой главы.

В проективной геометрии для однородных координат принято следующее обозначение:

x : y : 1

или, более общо,

$x_1 : x_2 : x_3$.

(напомним, что здесь непременно требуется, чтобы числа x_1, x_2, x_3 одновременно в нуль не обращались).

Применение однородных координат оказывается удобным уже при решении простейших задач.

Рассмотрим, например, вопросы, связанные с изменением масштаба. Если устройство отображения работает только с целыми числами (или если необходимо работать только с целыми числами), то для произвольного значения h (например, h = 1) точку с однородными координатами

(0.5 0.1 2.5)

представить нельзя. Однако при разумном выборе h можно добиться того, чтобы координаты этой точки были целыми числами. В частности, при h = 10 для рассматриваемого примера имеем

(5 1 25).

Рассмотрим другой случай. Чтобы результаты преобразования не приводили к арифметическому переполнению, для точки с координатами

(80000 40000 1000)

можно взять, например, h=0,001. В результате получим

(80 40 1).

Приведенные примеры показывают полезность использования однородных координат при проведении расчетов. Однако основной целью введения однородных координат в компьютерной графике является их несомненное удобство в применении к геометрическим преобразованиям.

При помощи троек однородных координат и матриц третьего порядка можно описать любое аффинное преобразование плоскости.

В самом деле, считая h = 1, сравним две записи: помеченную символом * и нижеследующую, матричную:

$$(x^* \; y^* \; 1) = (x \; y \; 1)\begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

Нетрудно заметить, что после перемножения выражений, стоящих в правой части последнего соотношения, мы получим обе формулы (*) и верное числовое равенство 1 = 1.

Тем самым сравниваемые записи можно считать равносильными.

Замечание

Иногда в литературе используется другая запись - запись по столбцам:

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \lambda \\ \gamma & \delta & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Такая запись эквивалентна приведенной выше записи по строкам (и получается из нее транспонированием).

Элементы произвольной матрицы аффинного преобразования не несут в себе явно выраженного геометрического смысла. Поэтому чтобы реализовать то или иное отображение, то есть найти элементы соответствующей матрицы по заданному геометрическому описанию, необходимы специальные приемы. Обычно построение этой матрицы в соответствии со сложностью рассматриваемой задачи и с описанными выше частными случаями разбивают на несколько этапов.

На каждом этапе ищется матрица, соответствующая тому или иному из выделенных выше случаев А, Б, В или Г, обладающих хорошо выраженными геометрическими свойствами.

Выпишем соответствующие матрицы третьего порядка.

А. Матрица вращения (rotation)

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Б. Матрица растяжения(сжатия) (dilatation)

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В. Матрица отражения (reflection)

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Г. Матрица переноса (translation)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим примеры аффинных преобразований плоскости.

Пример 1

Построить матрицу поворота вокруг точки $A(a, b)$ на угол φ (рис. 9).

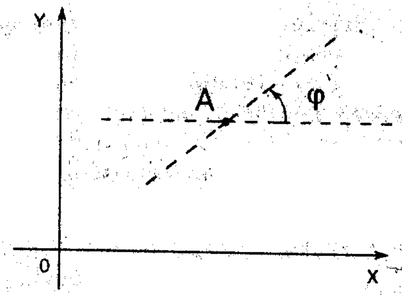

Рис. 9

1-й шаг. Перенос на вектор -A(-a, -b) для совмещения центра поворота с началом координат;

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

матрица соответствующего преобразования.

2-й шаг. Поворот на угол φ;

$$[R_\varphi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

матрица соответствующего преобразования.

3-й шаг. Перенос на вектор A(a, *b*) для возвращения центра поворота в прежнее положение;

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

матрица соответствующего преобразования.

Перемножим матрицы в том же порядке, как они выписаны:

$$[T_{-A}][R_\varphi][T_A].$$

В результате получим, что искомое преобразование (в матричной записи) будет выглядеть следующим образом:

$$(x^* \; y^* \; 1) = (x \; y \; 1) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -a\cos\varphi + b\sin\varphi + a & -a\sin\varphi - b\cos\varphi + b & 1 \end{bmatrix}$$

Элементы полученной матрицы (особенно в последней строке) не так легко запомнить. В то же время каждая из трех перемножаемых матриц по геометрическому описанию соответствующего отображения легко строится.

Пример 2

Построить матрицу растяжения с коэффициентами растяжения α вдоль оси абсцисс и β вдоль оси ординат и с центром в точке $A(a, b)$.

1-й шаг. Перенос на вектор -A(-a, -b) для совмещения центра растяжения с началом координат;

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix}$$

матрица соответствующего преобразования.

2-й шаг. Растяжение вдоль координатных осей с коэффициентами α и δ соответственно; матрица преобразования имеет вид

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-й шаг. Перенос на вектор A(a, b) для возвращения центра растяжения в прежнее положение; матрица соответствующего преобразования -

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

Перемножив матрицы в том же порядке

$$[T_{-A}][D][T_A],$$

получим окончательно

$$(x^* \; y^* \; 1) = (x \; y \; 1)\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ (1-\alpha)a & (1-\delta)b & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание

Рассуждая подобным образом, то есть разбивая предложенное преобразование на этапы, поддерживаемые матрицами

[R], [D], [M], [T],

можно построить матрицу любого аффинного преобразования по его геометрическому описанию.

Аффинные преобразования в пространстве

Обратимся теперь к трехмерному случаю (3D) (3-dimension) и начнем наши рассмотрения сразу с введения однородных координат.

Поступая аналогично тому, как это было сделано в размерности два, заменим координатную тройку (x, y, z), задающую точку в пространстве, на четверку чисел

$(x\ y\ z\ 1)$

или, более общо, на четверку

$(hx\ hy\ hz),\ h \neq 0.$

Каждая точка пространства (кроме начальной точки O) может быть задана четверкой одновременно не равных нулю чисел; эта четверка чисел определена однозначно с точностью до общего множителя.

Предложенный переход к новому способу задания точек дает возможность воспользоваться матричной записью и в более сложных, трехмерных задачах.

Любое аффинное преобразование в трехмерном пространстве может быть представлено в виде суперпозиции вращений, растяжений, отражений и переносов. Поэтому вполне уместно сначала подробно описать матрицы именно этих преобразований (ясно, что в данном случае порядок матриц должен быть равен четырем).

А. Матрицы вращения в пространстве

Матрица вращения вокруг оси абсцисс на угол φ:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица вращения вокруг оси ординат на угол ψ:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица вращения вокруг оси аппликат на угол χ:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\chi & \sin\chi & 0 & 0 \\ -\sin\chi & \cos\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание

Полезно обратить внимание на место знака "-" в каждой из трех приведенных матриц.

Б. Матрица растяжения (сжатия):

$$[D] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где

$\alpha > 0$ - коэффициент растяжения (сжатия) вдоль оси абсцисс;
$\beta > 0$ - коэффициент растяжения (сжатия) вдоль оси ординат;
$\gamma > 0$ - коэффициент растяжения (сжатия) вдоль оси аппликат).

В. Матрицы отражения

Матрица отражения относительно плоскости *xy*:

$$[M_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица отражения относительно плоскости *yz*:

$$[M_x] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица отражения относительно плоскости *zx*:

$$[M_y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Г. Матрица переноса (здесь (λ, μ, ν) - вектор переноса):

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание

Как и в двумерном случае, все выписанные матрицы невырождены.

Приведем важный пример построения матрицы сложного преобразования по его геометрическому описанию.

Пример 1

Построить матрицу вращения на угол φ вокруг прямой L, проходящей через точку A(a, b, c) и имеющую направляющий вектор (l, m, n). Можно считать, что направляющий вектор прямой является единичным:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

На рис. 10 схематично показано, матрицу какого преобразования требуется найти.

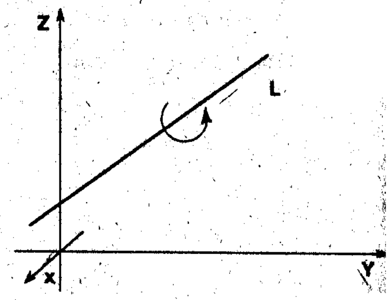

Рис. 10

Решение сформулированной задачи разбивается на несколько шагов. Опишем последовательно каждый из них.

1-й шаг. Перенос на вектор -A(-a, -b, -c) при помощи матрицы

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -b & -c & 1 \end{bmatrix}$$

В результате этого переноса мы добиваемся того, чтобы прямая L проходила через начало координат.

2-й шаг. Совмещение оси аппликат с прямой L двумя поворотами вокруг оси абсцисс и оси ординат.

1-й поворот - вокруг оси абсцисс на угол ψ (подлежащий определению). Чтобы найти этот угол, рассмотрим ортогональную проекцию L' исходной прямой L на плоскость X = 0 (рис. 11).

Направляющий вектор прямой L' определяется просто - он равен

(0, m, n).

Отсюда сразу же вытекает, что

$$\cos\psi = \frac{n}{d}, \quad \sin\psi = \frac{m}{d},$$

где $d = \sqrt{m^2 + n^2}$.

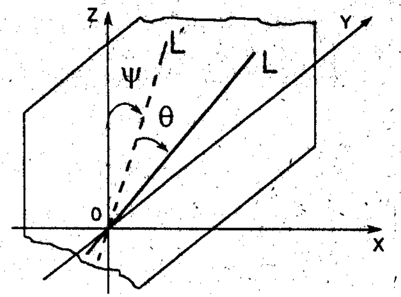

Рис. 11

Соответствующая матрица вращения имеет следующий вид:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{d} & \dfrac{m}{d} & 0 \\ 0 & -\dfrac{m}{d} & \dfrac{n}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Под действием преобразования, описываемого этой матрицей, координаты вектора (*l*, m, n) изменятся. Подсчитав их, в результате получим

$$(l,\ m,\ n,\ 1)\left[R_x\right] = (l,\ 0,\ d,\ 1).$$

2-й поворот - вокруг оси ординат на угол θ, определяемый соотношениями

$$\cos\theta = l,\quad \sin\theta = -d.$$

Соответствующая матрица вращения записывается в следующем виде:

$$\left[R_y\right] = \begin{bmatrix} l & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-й шаг. Вращение вокруг прямой L на заданный угол φ.

Так как теперь прямая L совпадает с осью аппликат, то соответствующая матрица имеет следующий вид:

$$\left[R_z\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4-й шаг. Поворот вокруг оси ординат на угол $-\theta$.

5-й шаг. Поворот вокруг оси абсцисс на угол $-\psi$.

Замечание

Вращение в пространстве некоммутативно. Поэтому порядок, в котором проводятся вращения, является весьма существенным.

6-й шаг. Перенос на вектор $A(a, b, c)$.

Перемножив найденные матрицы в порядке их построения, получим следующую матрицу:

$$[T]\left[R_x\right]\left[R_y\right]\left[R_z\right]\left[R_y\right]^{-1}\left[R_x\right]^{-1}[T]^{-1}.$$

Выпишем окончательный результат, считая для простоты, что ось вращения L проходит через начальную точку:

$$\begin{pmatrix} l^2 + \cos\varphi\left(1 - l^2\right) & l(1-\cos\varphi)m + n\sin\varphi & l(1-\cos\varphi)n - m\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)m - n\sin\varphi & m^2 + \cos\varphi\left(1 - m^2\right) & m(1-\cos\varphi)n + l\sin\varphi & 0 \\ l(1-\cos\varphi)n + m\sin\varphi & m(1-\cos\varphi)n - l\sin\varphi & n^2 + \cos\varphi\left(1 - n^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассматривая другие примеры подобного рода, мы будем получать в результате невырожденные матрицы вида

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ \lambda & \mu & \nu & 1 \end{bmatrix}$$

При помощи таких матриц можно преобразовывать любые плоские и пространственные фигуры.

Пример 2

Требуется подвергнуть заданному аффинному преобразованию выпуклый многогранник.

Для этого сначала по геометрическому описанию отображения находим его матрицу [A]. Замечая далее, что произвольный выпуклый многогранник однозначно задается набором всех своих вершин

$$V_i\left(x_i, y_i, z_i\right),\quad i = 1, \ldots, n,$$

строим матрицу

$$V = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ . & . & . & . \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{pmatrix}$$

Подвергая этот набор преобразованию, описываемому найденной невырожденной матрицей четвертого порядка, [V][A], мы получаем набор вершин нового выпуклого многогранника - образа исходного (рис. 12).

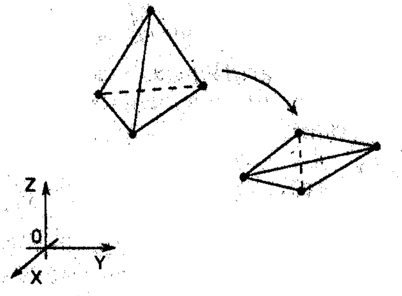

Рис. 12